

U. Didáctica 5: Expresiones algebraicas

RECUERDA

Expresión algebraica. Combinación de números y letras unidos por las operaciones: suma, resta, producto, división y potenciación.

Ejemplo: $3x^2y - 5xy^2 + 3$

Valor numérico de una expresión algebraica. Es el valor que toma la expresión algebraica cuando sustituimos las letras por números y realizamos las operaciones indicadas.

Ejemplo: El valor de $3x + 5x^2$ para $x = 2$ es $3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 = 6 + 5 \cdot 4 = 6 + 20 = 26$.

Ejemplos de lenguaje algebraico

- Un número:	x
- Dos números consecutivos:	$x, x + 1$
- El doble de un número:	$2x$
- El triple de un número:	$3x$
- Cuántos años tendrá Pepe dentro de cinco años:	$x + 5$
- Un número par:	$2x$
- Dos números pares consecutivos:	$2x, 2x + 2$
- Un número impar:	$2x + 1$
- La mitad de un número:	$x/2$
- Dos números que suman 18:	$x, 18 - x$

Ejercicios

1. Expresa algebraicamente las siguientes operaciones.

- Tres números naturales consecutivos.
- Tres números pares consecutivos.
- La mitad del cuadrado de un número
- El triple de un número impar
- El triple del resultado de restar 5 unidades a un número
- El cubo de un número más la quinta parte del mismo número
- El cuadrado de la tercera parte de un número
- La cuarta parte de un número más el doble de dicho número

2. Calcula los valores numéricos de las siguientes expresiones algebraicas para los valores de las letras que se indican.

a) $4x^2$, para $x = -2$

b) $-2x - 8$, para $x = 4$

c) $(2x + 3)^2$, para $x = -1$

d) $(2x + y)^2$, para $x = -1$ e $y = -2$

e) $3a - 2b - c$, para $a = -4$, $b = -5$, $c = 0$

f) $\frac{(2a - b)}{c}$, para $a = 2$, $b = 5$, $c = \frac{3}{4}$

3. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones para $y = -2$, $z = 3$

a) $2y + 2zy$

b) $-\frac{2}{3}yz^2$

c) $z^2 + 3y^3$

d) $\frac{yz^3}{9}$

e) $(z - y)^2$

f) $-5y + \frac{2}{5}z^4$

MONOMIOS Y POLINOMIOS**Monomios.**

Un monomio es una expresión algebraica formada por el producto de un número (coeficiente) y letras (parte literal) con exponentes naturales.

El **Grado de un monomio** es la suma de los exponentes de las letras.

Ejemplo: $\text{Grado}(-5a^3b^2c) = 3 + 2 + 1 = 6$ (

Operaciones con monomios

- a) **Suma y resta:** para poder sumar o restar monomios deben de ser semejantes, es decir, tener la misma parte literal, se suman o se restan los coeficientes y se deja la parte literal.

Ejemplo: $9xy - 3xy = 6xy$

- b) **Producto:** se multiplican los coeficientes y la parte literal sumando exponentes.

Ejemplo: $3x \cdot 5x^2 = 15x^3$

- c) **División:** se dividen los coeficientes y la parte literal restando exponentes.

Ejemplo: $\frac{-6x^2y^4}{2xy^2} = -3xy^2$

- d) **Potenciación:** se eleva el coeficiente al exponente y la parte literal.

Ejemplo: $(-2x^3y^2z)^2 = (-2)^2 \cdot (x^3)^2 \cdot (y^2)^2 \cdot z^2 = 4x^6y^4z^2$

Polinomios

Un polinomio de grado n , en una variable x , es una expresión algebraica de la forma

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son números llamados **coeficientes**. Todos los exponentes deben ser enteros positivos y el mayor de ellos, n en este caso, indica el grado del polinomio.

A cada uno de los sumandos se les llama **términos**. El término de grado 2 es a_2x^2 . El **término principal** es a_nx^n , el de mayor grado. El número a_0 se llama **término independiente**.

Dos **términos** son **semejantes** cuando sólo difieren en los coeficientes: a_nx^n y b_nx^n son semejantes. En particular, $5x^3$ y $-17x^3$ son semejantes; por el contrario, $10x^2$ y $10x$ no lo son.

Operaciones con polinomios

- a) **Suma y resta de polinomios.** Para sumar polinomios se agrupan, sumando o restando, los términos semejantes.

Ejemplo: $(4x^3 + 5x - 6) - (3x^3 - 2x^2 + 7x) + (6x^3 + 4x^2 - x + 5) = 7x^3 + 6x^2 - 3x - 1$

- b) **Multiplicación de polinomios.** Se multiplica cada monomio del primer polinomio por cada monomio del segundo polinomio y se operan los monomios semejantes obtenidos.

Ejemplos:

- $3 \cdot (4x^2 + 5x - 6) = 12x^2 + 15x - 18$
- $(2x^2 + 5x - 6) \cdot (3x^2 - 2x + 3) = 6x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 15x^3 - 10x^2 + 15x - 18x^2 + 12x - 18 = 6x^4 + 11x^3 - 22x^2 + 27x - 18$
- $\left(\frac{2}{3}x^2 - 3x\right) \cdot \left(-2x^2 + \frac{3}{4}\right) = -\frac{4}{5}x^4 + \frac{6}{12}x^2 + 6x^3 - \frac{9}{4}x = -\frac{4}{5}x^4 + 6x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x$

- c) Una **potencia** de exponente natural de un polinomio es igual al producto del polinomio por sí mismo tantas veces como indica el exponente.

Ejemplo: $(4x^2 + 3x^2)^2 = (4x^2 + 3x^2) \cdot (4x^2 + 3x^2) = 16x^4 + 12x^3 + 12x^3 + 9x^4 = 16x^4 + 24x^3 + 9x^2$

- d) **Cociente de un polinomio entre un monomio.** Para dividir un polinomio entre un monomio se divide cada término del polinomio entre el monomio

Ejemplo: $(6x^4 - 8x^3 + 3x^2) : (2x^2) = 6x^4 : 2x^2 - 8x^3 : 2x^2 + 3x^2 : 2x^2 = 3x^2 - 4x + \frac{3}{2}$

4. Halla el valor numérico de las expresiones $Q(x,y) = 3xy^2 - 7x + 5xy - 4y$, $R(y,z) = 8y^3z + 6y^2 + z - 3$ y $S(x,z) = -x^4 + 6x^2z + xz - 3$ para los valores que se indican.

a) $Q(2,-1)$

b) $R(0,-2)$

c) $S(-3,2)$

5. Sea $P(x) = x^3 + 4ax^2 - 2x + 3$. Calcula el valor de a para que $P(1) = 10$.

6. Resuelve las siguientes sumas de monomios

a) $2x^2b + 3x^2b - 6x^2b$

b) $5ax^3 - 2ax^3 - 8ax^3$

c) $14b^6t - 16b^6t + 3b^6t$

d) $8y^4 - 6y + 10y^4 - 14y$

e) $6m^3 + 8m - 4m^3 + 12m$

f) $6x^2 + 12x^2m^2 - 4m^2x^2$

g) $6ab - 12a^3b^3 + 8ab + 14a^3b^3$

h) $6ab - 7mn + 8ab$

7. Dados los polinomios $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$, $Q(x) = x^4 - x^3 + 4$, $R(x) = 3x^2 - 5x + 5$ y $S(x) = 3x - 2$ resuelve las siguientes sumas y restas.

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - R(x)$

c) $P(x) - Q(x) + R(x)$

d) $Q(x) - [R(x) + S(x)]$

8. Considera los polinomios $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ y $S(x)$ del ejercicio anterior y resuelve los siguientes productos y potencias.

a) $R(x) \cdot S(x)$

b) $P(x) \cdot S(x)$

c) $[S(x)]^2$

d) $[R(x)]^2$

9. Sean $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ y $S(x)$ los polinomios del ejercicio 7. Realiza las siguientes operaciones combinadas.

a) $P(x) - 2Q(x) + 3R(x)$

b) $P(x) - 3[Q(x) + R(x)]$

c) $[Q(x) - R(x)] \cdot S(x)$

d) $-[Q(x) + 2R(x)] \cdot S(x)$

10. Calcula las siguientes divisiones.

a) $(8x^3 - 6x^2 + 4x) : (2x)$

b) $(-3x^4 + 6x^3 - 12x^2) : (3x^2)$

c) $(-12x^9 + 2x^5 - x^4) : (4x^4)$

d) $(8x^8 - 6x^4 - 4x^3) : (-4x^3)$

EXTRACCIÓN DE FACTOR COMÚN

Si los monomios de un polinomio tienen factores comunes, se puede expresar el polinomio como el producto de un monomio, llamado factor común, por otro polinomio de menor grado. La operación se llama **extracción de factor común**

11. Saca factor común en las siguientes expresiones algebraicas.

a) $3x^3 + 6x^2 - 12x$

b) $12x^4y^2 + 6x^2y^4 - 15x^3y$

c) $-5xyz - 20xy^2 - 10x^2yz$

d) $2ab^2 - 4a^3b + 8a^4b^3$

12. Realiza las siguientes operaciones combinadas.

$$a) \frac{2x^2}{5} \cdot (x^3 - 3x^2 + x - 1) - x^3 \cdot \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{2}{3} \right)$$

$$b) \left(\frac{5x^3}{3} - x^2 + \frac{2x}{5} - 7 \right) \cdot \left(\frac{5x^2}{4} - 3x \right)$$

PRODUCTOS NOTABLES

Productos notables:

Son operaciones que aparecen con relativa frecuencia. Conocerlas de memoria agiliza los cálculos. Indicamos los tres casos más frecuentes.

- Cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ejemplo: $(2 + 3x^2)^2 = 4 + 12x^2 + 9x^4$

- Cuadrado de una resta: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ejemplo: $(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$

- Producto de una suma por una diferencia: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ejemplo: $(\sqrt{x-2} + 3)(\sqrt{x-2} - 3) = (\sqrt{x-2})^2 - 3^2 = x - 2 - 9 = x - 11$

13. Desarrolla los siguientes productos utilizando las identidades notables.

$$a) (x + 4)^2$$

$$b) (2x - 3)^2$$

$$c) (3x+4) \cdot (3x-4)$$

$$d) \left(\frac{1}{2}a^3b + \frac{3}{2}ab^3 \right)^2$$

$$e) \left(\frac{3}{5}xy^2z^3 - \frac{1}{5}x^4 \right)^2$$

$$f) \left(\frac{2}{7}xz^2 - \frac{1}{3}y \right) \cdot \left(\frac{2}{7}xz^2 + \frac{1}{3}y \right)$$

14. Expresa los siguientes polinomios como producto de binomios usando las identidades notables.

$$a) x^2 - 6x + 9$$

$$b) 4x^2 + 4x + 1$$

$$c) 25x^2 - 9$$

$$d) x^2y^2 - 2xy + 1$$

$$e) 4x^2 - \frac{4}{9}$$

$$f) 9x^2 - 30x + 25$$

15. Simplifica las siguientes expresiones utilizando las identidades notables.

a) $(3x-5)^2 - x(9x-4)$

b) $(2x+1)^2 - (2x-1)^2 + x$

c) $(x-4)^2 - x(2x-1)^2$

d) $(5x-7)^2 - (5x-7)(5x+7) + 4$

e) $x - 2(x+1)^2 - (2x+4)^2$

f) $(3x-1)(3x+1) - (x+8)^2$